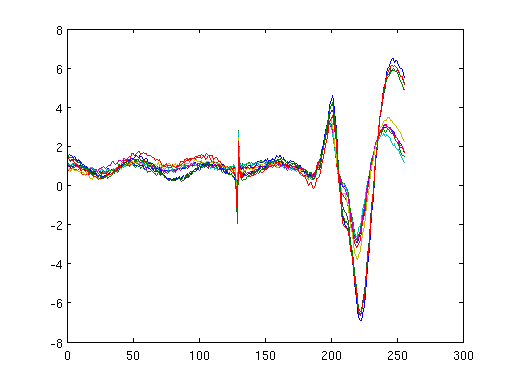
 Моделирање на UNO како марков процес



Изработил:

Борјан Димески

Ментори:

Проф. Д-р Александра Поповкса Митровиќ

Проф. Д-р Верица Бакева

Септември 2025

Содржина

[Вовед 2](#_Toc210067381)

[Дефинирање на состојба 2](#_Toc210067382)

[Карактеристики како марков процес 2](#_Toc210067383)

[UNO како случаен процес 3](#_Toc210067384)

[Модел 4](#_Toc210067385)

[Симулации 4](#_Toc210067386)

[Густината на случајната променлива 5](#_Toc210067387)

[Хипотеза 5](#_Toc210067388)

[Резултати 6](#_Toc210067389)

[Забелешка 1: 6](#_Toc210067390)

[Забелешка 2: 6](#_Toc210067391)

[Споредба со Гама распределба 6](#_Toc210067392)

[Резултати 7](#_Toc210067393)

[Резултати со тунирање 8](#_Toc210067394)

[Математичко очекување и дисперзија 8](#_Toc210067395)

[Хипотеза 9](#_Toc210067396)

[Резултати 9](#_Toc210067397)

[Математичко очекување 10](#_Toc210067398)

[Стандардна девијација 11](#_Toc210067399)

[Влијание на степенот на мешање 11](#_Toc210067400)

[Дополнителни експерименти 11](#_Toc210067401)

[Хипотеза 12](#_Toc210067402)

[Резултати 12](#_Toc210067403)

[Математичко очекување и дисперзија 13](#_Toc210067404)

[Заклучок 13](#_Toc210067405)

# Вовед

Поради својата стохастичка природа, играта со карти UNO може да се моделира како случаен процес. Во овој труд таа ќе биде разгледана како вид на Марков процес, при што ќе се анализира како должината на една партија зависи од различни фактори во играта.

# Дефинирање на состојба

Со цел да се покаже марковото својство прво потребно е да се дефинираат карактеристиките на состојбата во секој момент. Секоја состојба ги поседува следните карактеристики:

* горната карта на шпилот за фрлање карти,
* картите во раката на играчот кој е на ред,
* шпилот од кој се влечат карти,
* насоката во која се движи редоследот на играње.

Доколку овие информации се познати, можно е да се одредат сите идни состојби и нивните веројатности. Потегот на следниот играч зависи единствено од моменталната состојба, но не и од редоследот претходните потези. Оттука, распределбата на идните состојби зависи само од претходната, што го задоволува марковото својство.

Пример:

Нека најгорната карта е 5 срце, а играчот на ред има во рака 5 детелина, 9 срце и карта за менување боја. Во шпилот за влечење остануваат 20 карти, а насоката е во согласност со стрелките на часовникот. Веројатностите за следната состојба зависат исклучиво од овие податоци. Не е релевантно кога или како тие карти биле добиени, ниту кој претходно ја поставил картата 5 срце.

# Карактеристики како марков процес

Како марков процес, може него и неговите состојби да се класифицираат на различни начини:

* Преодни состојби – поради огромното множество на можни состојби, веројатноста

една состојба да се повтори повеќе пати е занемарливо мала, што значи може да се претпстави дека сите состојби во играта се преодни состојби, односно

* Повратни состојби – поради тоа што состојбите се преодни, следува дека тие НЕ се повратни;
* Апсорбирачки состојби – секоја состојба во која што системот останува во неа откога ќе влезе е апсорбирачка. Во овој случај, тоа е состојбата во која некој од играчите ќе победи. Кога еден играч ќе ги потроши сите свои карти системот останува во таа состојба;
* Ергодичност – според тоа што постојат повеќе апсорбирачки состојби во системот, следува дека системот не е ергодичен, односно нема шанса системот да се најде во сите состојби барем еднаш;
* Конечност – иако множеството на можни состојби е огромно, сепак тоа е конечно. Ова, комбинирано со постоењето на апсорбирачки состојби доведува до заклучок дека веројатноста веригата да е апсорбирана е 1, односно играта секогаш ќе заврши и ќе има победник;
* Очекувано време на апсорбција – ова всушност е времето потребно да заврши партијата, односно некој да победи. Ова ќе биде измерено во број на редови на играчите кои поминале се додека не се стигне до апсорбирачката состојба. Ова својство подетално ќе биде разгледано понатаму.
* Комуникација – речиси секоја една состојба е достижлива од секоја останата, па единствено ограничување тука би ни го претставиле апсорбирачките состојби. Сите тие си формираат своја одделена комуникациска класа во која може да се стига од една до друга состојба.

# UNO како случаен процес

Нека играта е дефинирана како случаен процес дефиниран над променливата t – број на играчи во играта. Конфигурирајќи различни правила ќе биде анализиран процесот преку зависноста од бројот на играчи.

Поради комплексноста на играта и обемот на множеството од состојби и врските помеѓу истите, постојат 2 опции за изучување.

1. Да се поедностави проблемот и играта, односно да се разгледа игра во која има 3 до 4 броеви на карти, 2 знаци и двајца играчи. Во ваков случај би можело да се генерира матрица за веројатност на премин помеѓу состојби и во идеален случај ригерозно да се најдат заклучоци за процесот;
2. Да се користат Монте Карло статистички методи за да се донесат заклучоци за вистинската игра или некоја покомплицирана верзија од играта.

Во ова истражување ќе биде обработен Монте Карло методот и се извлечат заклучоци користејќи моделирање и генерирање на случајни примероци.

# Модел

За моделирање на играта користен е python код. Реализирано е користејќи три различни класи, имено Card, Player и Game.

Card: Оваа класа користи за претставување на една карта, односно нејзиниот број и нејзиниот знак.

Player: Оваа класа користи за претсатвување на играч и сите негови особини. Еден играч е претставен со колекција од карти кои ги држи во рака.

Game: Ова е главната класа во која е вградена логиката на играта. Една инстанца се карактеризира со голем број на подесувања, најбитни од кои се бројот на играчи (2, 3, 4, ...), нивото на мешање на картите (low, medium, high), бројот на броеви на карти (стандардно 14), бројот на знакови (стандардно 4) и дали се користат специјални карти.

Правилата на играта се следните:

* На почетокот се меша шпилот и се вади една карта на средина;
* Се делат карти на секој од играчите чии ред се менува кружно;
* Кога ќе дојде на ред еден играч, може да фрли карта доколку нејзиниот знак или нејзниниот број се совпаѓа со картата која се наоѓа најгоре на шпилот од фрлени карти. Доколку не поседува таква карта, влечи 1 карта и неговиот ред поминува.
* Специјални карти се 1 и 8 (скокање), 7 и 14 (+2 и +4 на следниот играч), 10 (менување на редоследот на кругот);
* Играта прекинува кога 1 играч ќе ги фрли сите карти. Тогаш тој победува.

Целиот код со кој се реализа ова се наоѓа на следниот линк:

<https://github.com/borjannn/uno_stochastic_process>

## Симулации

Симулациите се главно поделени на две групи:

* Игри во кои се користат специјални карти (скокање, полнење и менување редослед),
* Игри во кои НЕ се користат специјални карти.

Поради ограничениот борј на карти (4\*14) во првичните симулации ќе биде анализирана должината на партиите само за броеви на играчи 2 до 9 бидејќи со почетен број на карти 6 максимум 9 луѓе можат да играат и при тоа да останат карти во шпилот за влечење.

Главни својства кои ќе бидат набљудувани се математичкото очекување на должината на партијата и стандардната девијација на истата. За таа цел бидат искористени точкасти оценувачи за својствата. За математичкото очекување просекот, а за стандардната девијација коренот од средната квадратна разлика со именител n-1 за пристрасност.

Следните експерименти се изведени врз 20 000 примероци од секој број на играчи од 2 до 9.

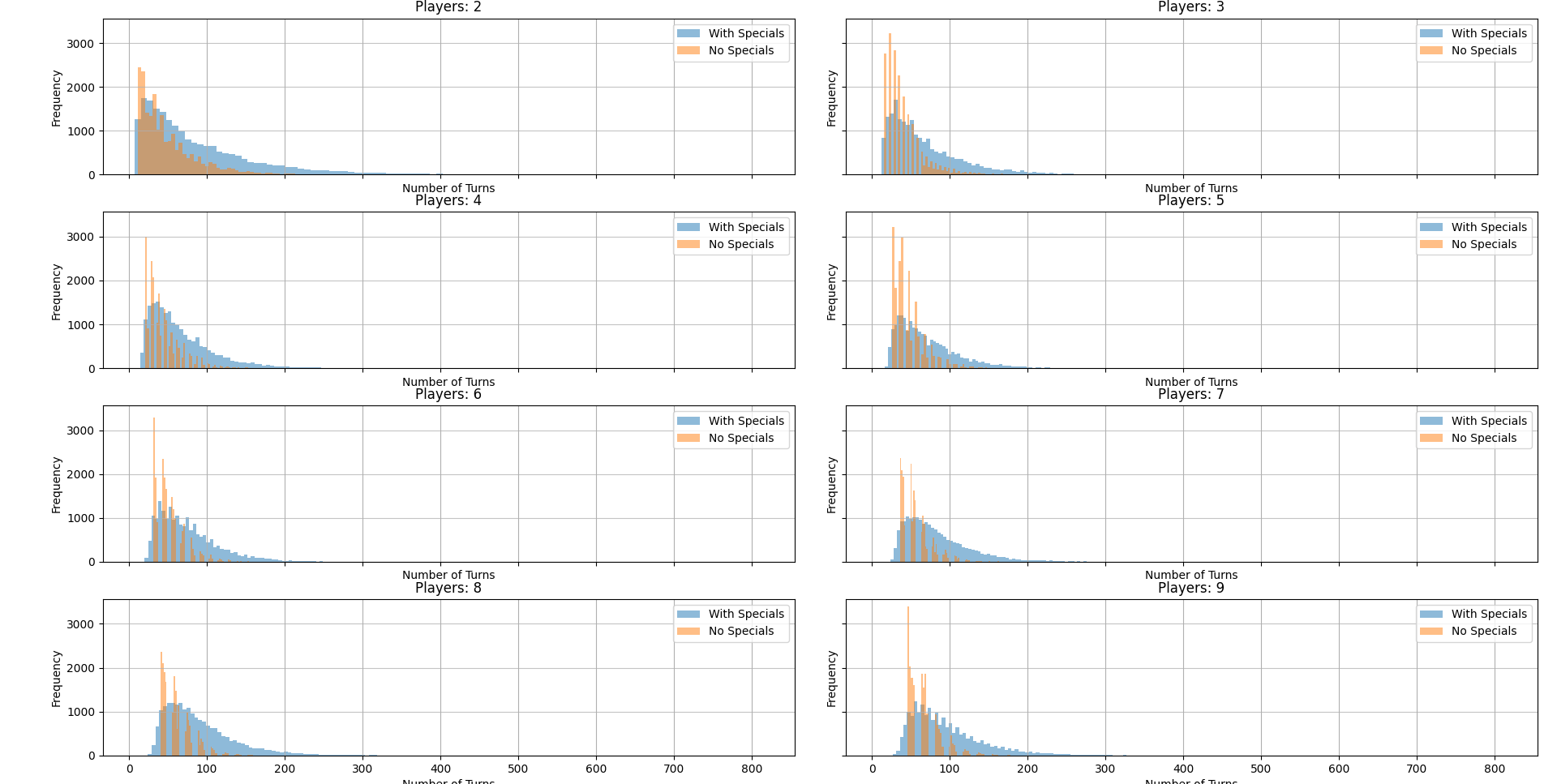
# Густината на случајната променлива

Нека случајната променлива е дефинирана како должината на партијата ако играат играчи. Тогаш ни е случаен процес дефиниран над множеството . За да се процени густината на случајната променлива поделени се вредностите добиени од симулациите на помали интервали (опсези) и групирани во истите со цел полесно да се претстават. На x оската се прикажани интервалите, а на у бројот на примероци од случајно генерираните кои припаѓаат во тие интервали.

## Хипотеза

За сега не е можно да се предвиди како ќе личат овие графици, но можно е да се направи препоставка дека дисперзијата на случајната променлива ќе е поголема кај игрите во кои се игра со специјални карти. Оваа претпоставка е врз основа на тоа што специјалните карти ќе додадат повеќе хаотичност и случајност во системот, па должините на партиите повеќе ќе варираат.

## Резултати



### Забелешка 1:

Хипотезата е потврдена, односно податоците кои доаѓаат од игрите во кои се дозволени специјални карти се многу повеќе расеани, а од друга страна тие каде не се дозволени се поконзистентни и збиени.

### Забелешка 2:

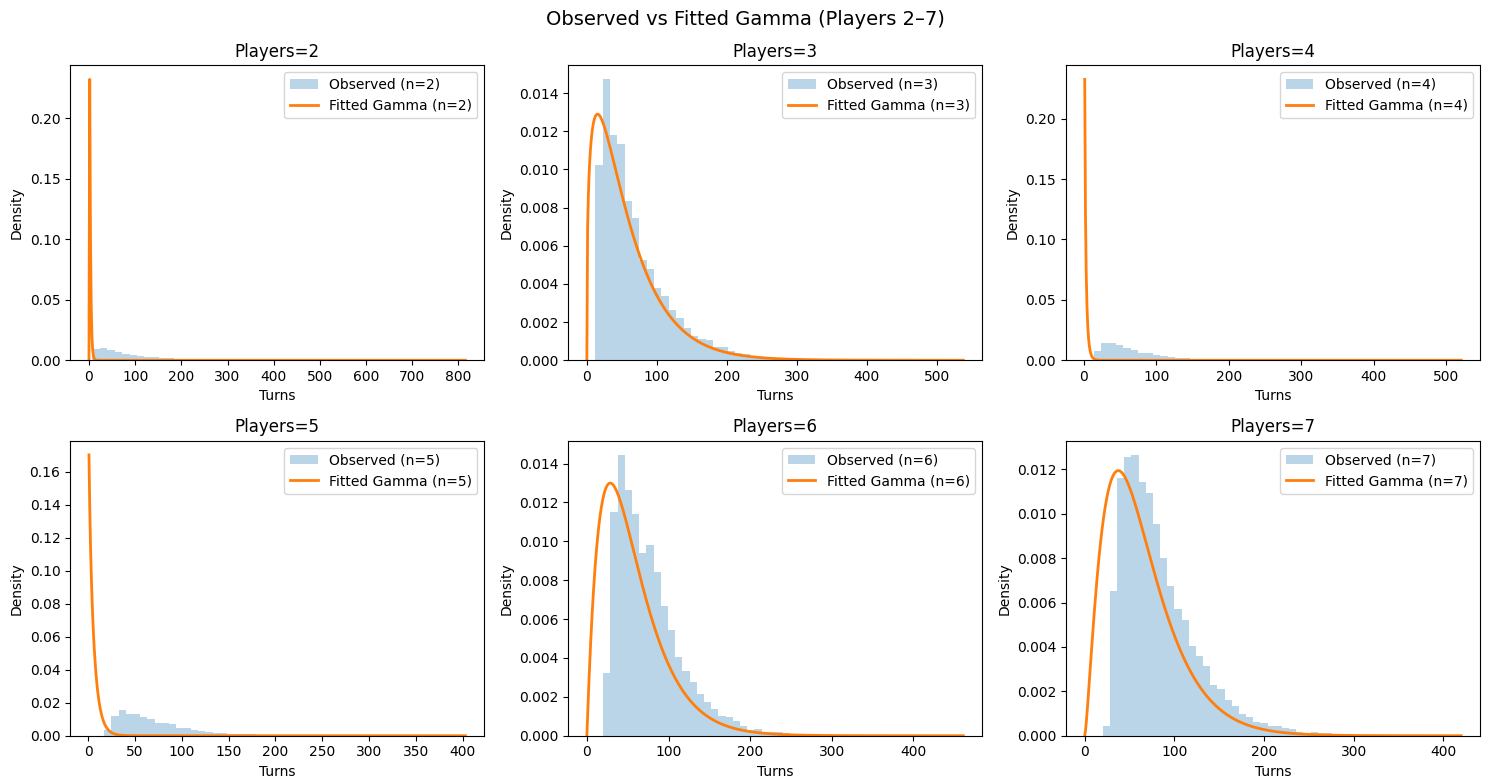
Како што се зголемува бројот на играчи, помалку варираат податоците и повеќе се стабилизираат. Распределбата личи како да се приближува кон кормална распределба на ист начин како што личи хиквадрат распределбата кога растат нејзините степени на слобода. Според ова, можно е распределбата на оваа случајна променлива е некој вид на гама распределба.

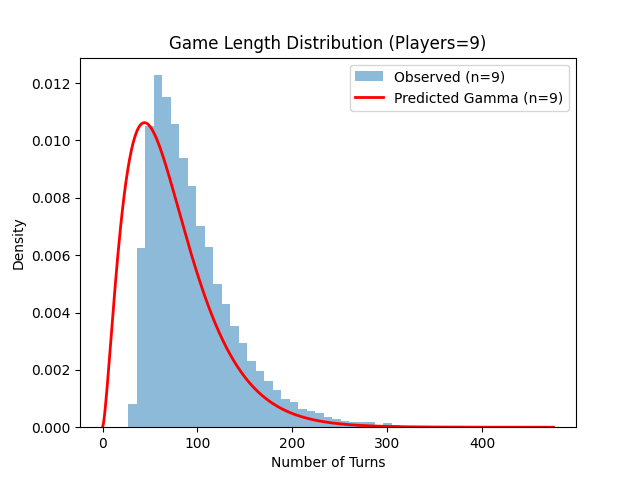
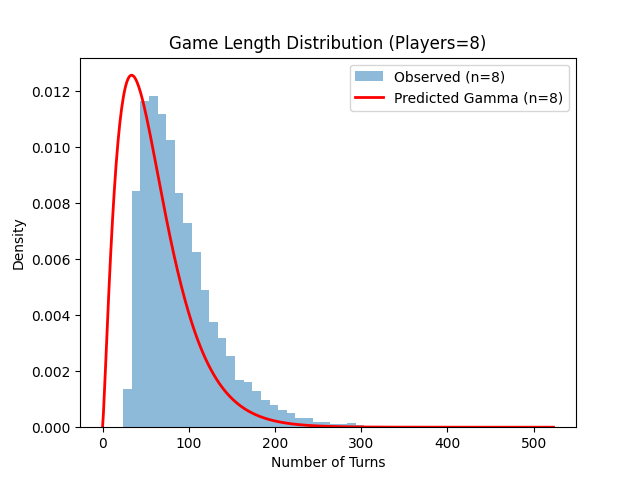
За жал, поради ограниченоста со бројот на играчи, оваа хипотеза не е можно со сигурност да се потврди, но можно е да се направи обид преку некои предвидувања за параметрите.

# Споредба со Гама распределба

Искористени се податоците од распределбите на 2, 3, ... , 7 играчи за да се предвиди изгледот на распределбата за 8 и 9 играчи. За оваа цел, прво потребно е да се искористат оценувачи за гама распределбата и да се најдат нејзините параметри користејќи ги податоците, и потоа користејќи некој статистички метод да се најдат истите за 8 и за 9 играчи.

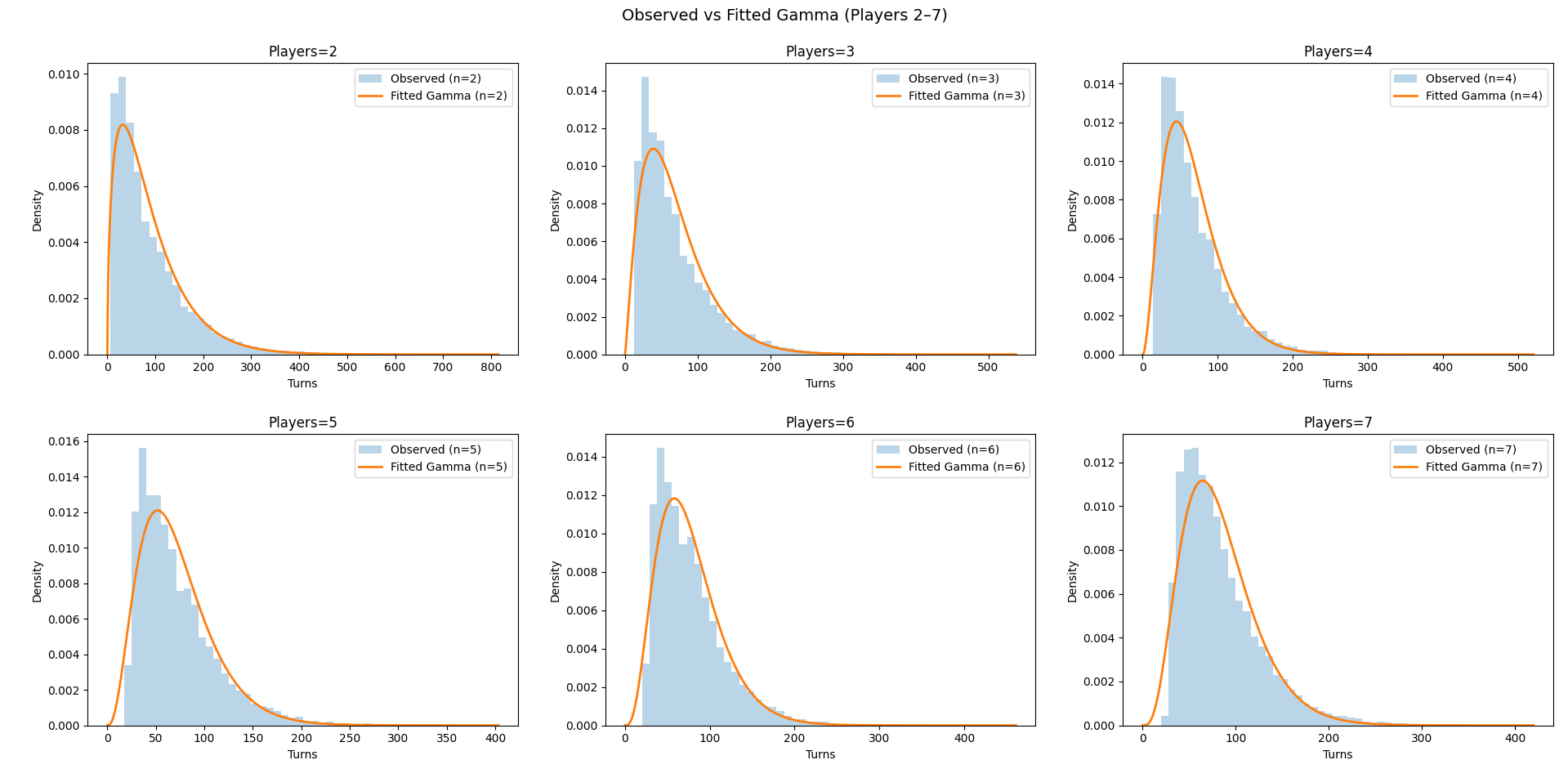
## Резултати

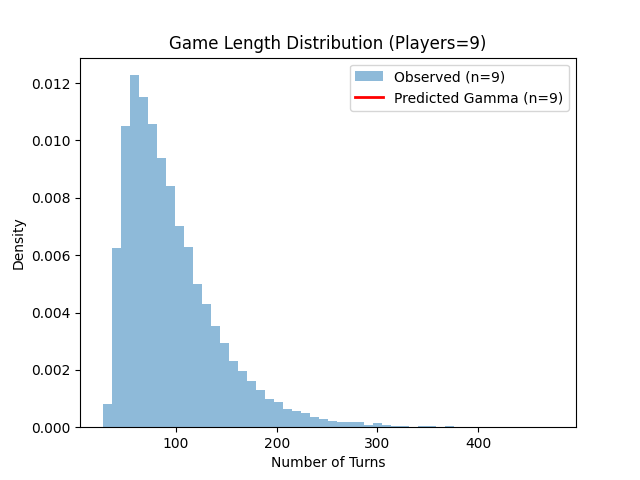
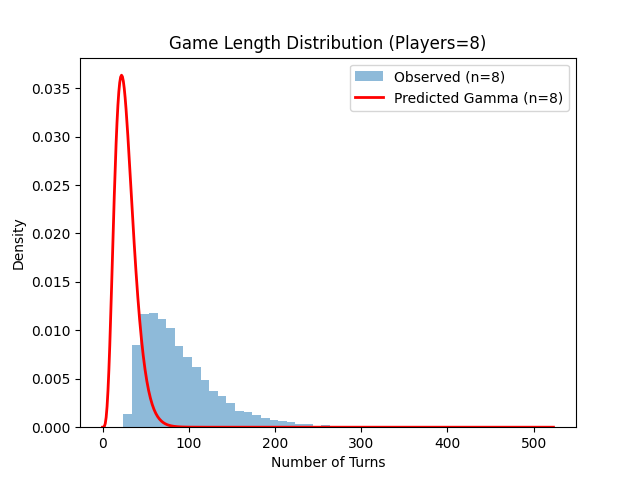




Иако предвидените вредности личат добри, сепак има проблем бидејќи во оценувањето на распределбите на број на играчи 2, 4 и 5 се наидува на многу чест проблем кај максимално подобниот оценувач за гама распределбата. Ова може да се поправи со предефинирање на loc параметарот да е строго позитивен, по што се добиваат следните резултати:

## Резултати со тунирање





Како што се забележува, во општо не се поклопуваат за 8, а за 9 играчи пак, распределбата во општо не постои будејќи најверојатно регресијата нашла опаѓачки тренд и тоа довело до негативен параметар.

Ова не мора конкретно да значи дека процесот не е во природа вид на Гама распределба, туку можно е само врската помеѓу параметрите и бројот на гирачи да не е полиномна.

# Математичко очекување и дисперзија

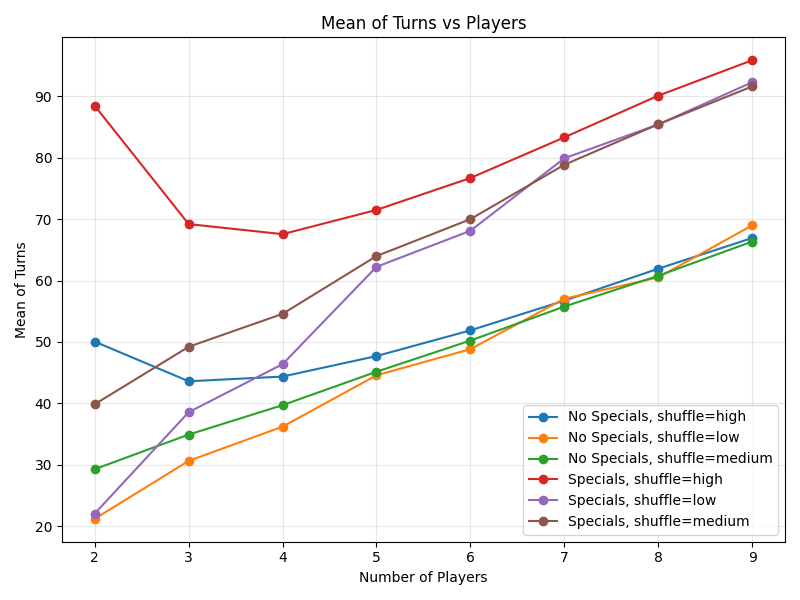
Следно, ќе биде испитано однесувањето на математичкото очекување и дисперзијата на променливата во зависност на бројот на играчи, дали се користат специјални карти, и степенот на мешање на шпилот.

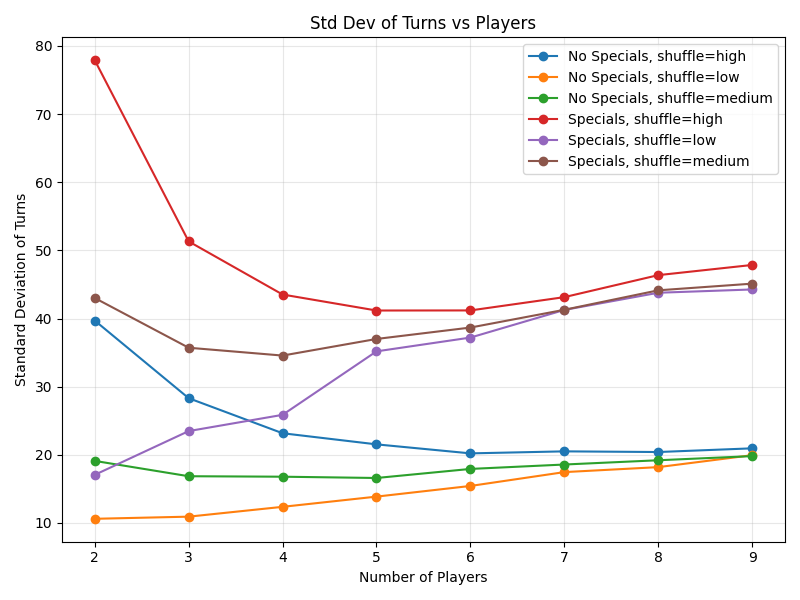
## Хипотеза

Дисперзијата на променливата, како и нејзиното математичко очекување ќе се зголемува како што подобро се меша шпилот карти. Подоброто мешање ќе доведе до повеќе неред, и резултантно помалце предвидливост во играта, па повеќе варијација во должината на партиите. Поради истите причини, истото би требало да се случи и како што се зголемува бројот на играчи.

За да се испита оваа хипотеза, претставени се на график дисперзијата, и математичкото очекување на податоците на у оската, а на х оската бројот на играчи. Претставени се податоци од сите комбинации меѓу (low shuffle, medium shuffle , high shuffle) и (special, no special), односно 6 класи.

## Резултати





### Математичко очекување

Во однос на математичкото очекување, на почетокот со мал број на играчи се забележува голема разлика помеѓу различните нивоа на мешање на картите. Но, како што расте бројот на играчи, ова влијание постепено се намалува и станува речиси ирелевантно. На тој начин, математичкото очекување кај сите видови мешање се стабилизира и следи заеднички тренд со слични вредности.

Ова може да се објасни на следниов начин:

со мал број на играчи, полесно е да се појават шеми во текот на играта, па системот има пониско ниво на оперативна ентропија. Во таков случај, влијанието на иницијалното мешање на шпилот е големо, бидејќи тој “неред” не се надополнува доволно од самиот тек на играта. Од друга страна, како што бројот на играчи се зголемува, самиот број на интеракции создава дополнително „природно мешање“ на шпилот. Тоа значи дека:

* ако почетното мешање било високо, ефектот останува висок;
* ако било средно, зголемениот број на играчи го издигнува кон високо ниво;
* ако било ниско, прво се движи кон средно, а потоа со доволно играчи достигнува високо.

Како резултат на ова, различните математички очекувања почнуваат да се поклопуваат.

Кај примероците каде што нема специјални карти, системот е поедноставен и содржи уште помалку ентропија, па резултатите уште од почеток се поблиски еден до друг. Дополнително, може да се забележи дека, за разлика од мешањето и бројот на играчи кои очигледно си влијаат едно на друго, бројот на играчи не влијае на ентропијата што специјалните карти ја внесуваат во системот. Ова е видливо поради константната разлика на вредностите помеѓу примероците со и без специјални карти.

Заклучно, заголемувањето на бројот на играчи делува како механизам што ја апсорбира и изедначува разликата меѓу различните нивоа на почетно мешање, но не ја елиминира ентропијата која специјалните карти постојано ја внесуваат во системот.

### Стандардна девијација

На почетокот, со мал број на играчи, варијацијата на бројот на потези е значително поголема кај примероците со специјални карти. Со зголемување на бројот на играчи, оваа варијација опаѓа и се стабилизира. Кај примероците без специјални карти, вредностите на стандардната девијација се значително пониски во сите случаи. Тука, со зголемување на бројот на играчи, варијацијата благо расте, но останува релативно мала. Ова укажува дека системот без специјални карти е далеку попредвидлив.

### Влијание на степенот на мешање

* Со специјални карти, на почетокот постои голема разлика меѓу нивоата на мешање, но таа се намалува како што расте бројот на играчи. На крајот сите нивоа (low, medium, high) се приближуваат кон исти вредности;
* Без специјални карти, мешањето има уште помал ефект врз варијацијата – кривите се речиси паралелни и блиски една со друга.

Со мал број играчи и специјални карти системот е хаотичен и непредвидлив, со големи флуктуации во должината на партиите. Со поголем број играчи самиот број на интеракции создава стабилизирачки ефект, па дури и со специјални карти, системот станува попредвидлив. Без специјални карти системот е стабилен и контролирана варијација се одржува независно од бројот на играчи.

Зголемувањето на бројот на играчи не само што ги изедначува математичките очекувања на различните нивоа на мешање, туку делува и како фактор на стабилизација што ја намалува непредвидливоста кај примероците со специјални карти.

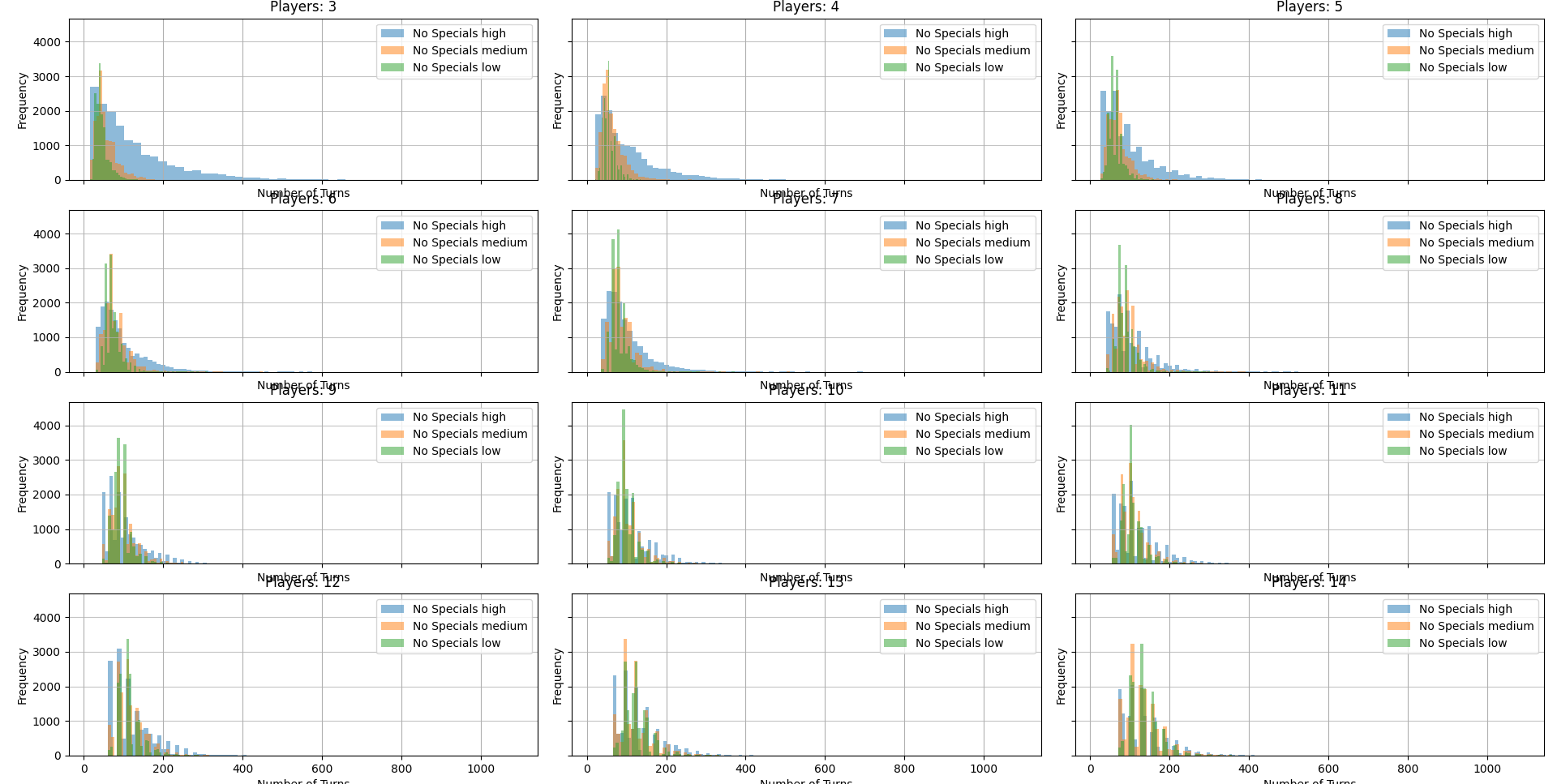
# Дополнителни експерименти

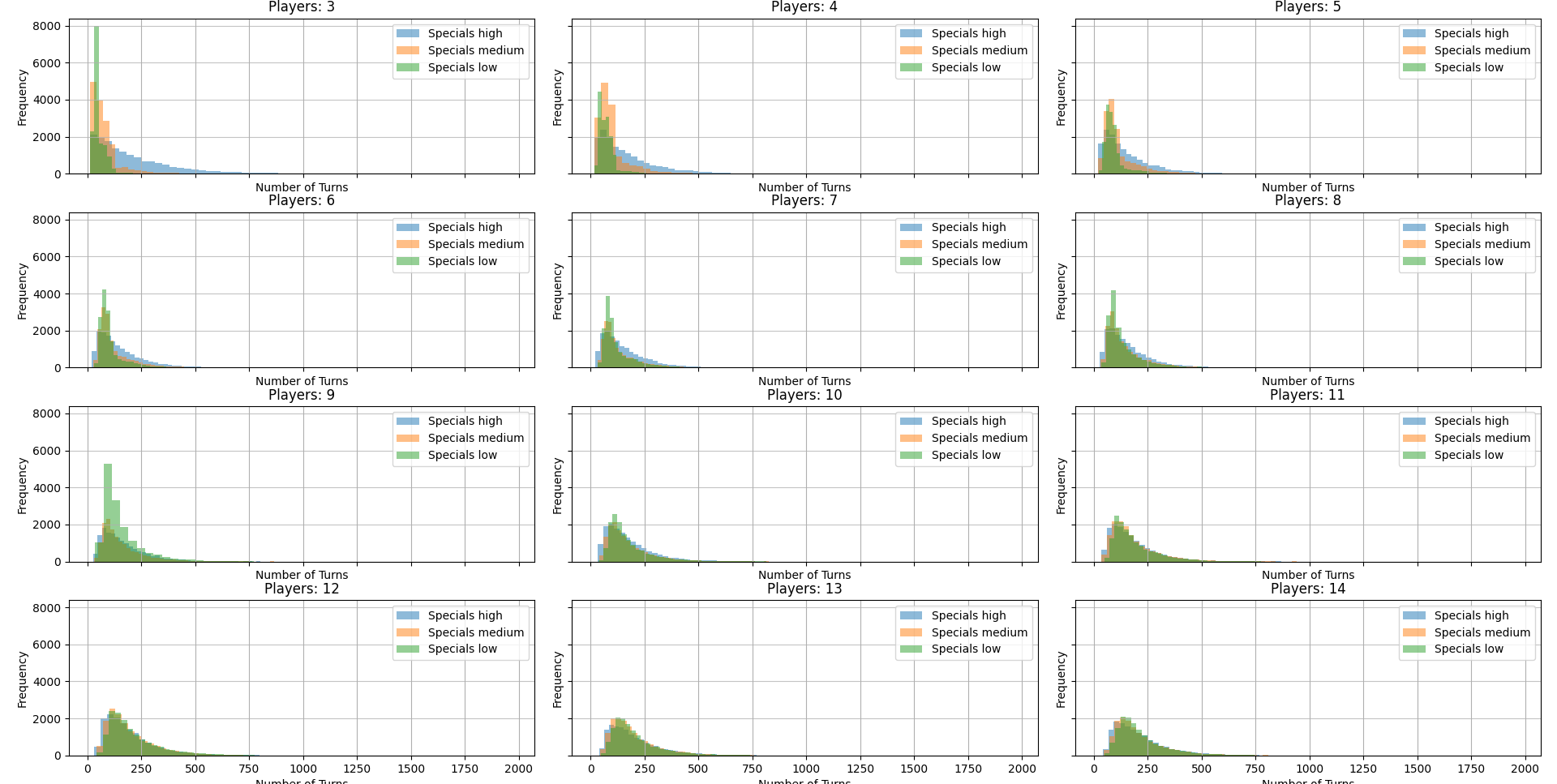
Заклучоците донесени сепак не се сигурни поради ограничениот број на играчи, па за да да се потврдат и со повеќе играчи потребно е да се симулираат партии со повеќе карти. Во продолжение се податоците извлечени од игри со 16 броеви на карти и 6 знаци на карти. Ова дава можност бројот на играчи да се зголеми до 14.

## Хипотеза

Зголемениот број на потенцијални играчи и карти кога е понизок бројот на играчи ќе ги зголеми должините на партиите, а како што се зголемува бројот на играчи поблаго ќе се зголемуваат должините поради тоа што шпилот е поголем и може да трпи повеќе дестабилизирачки ефекти.

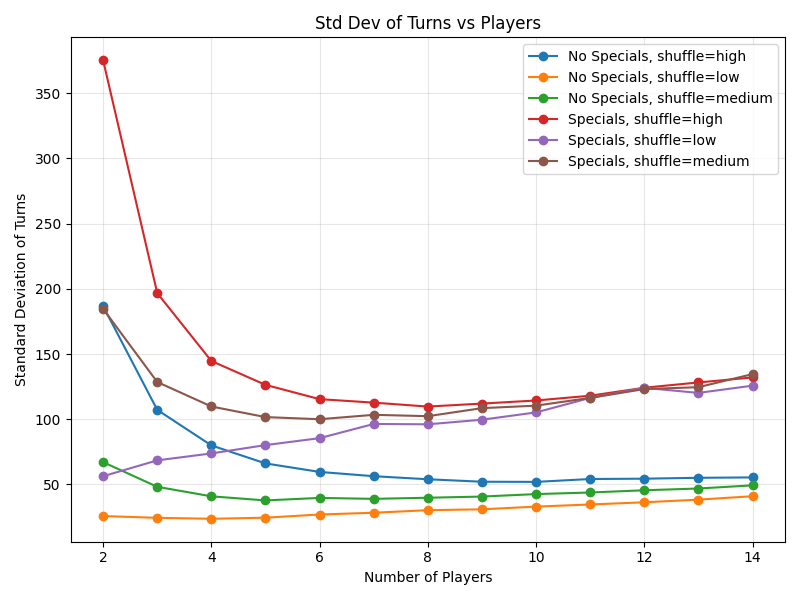
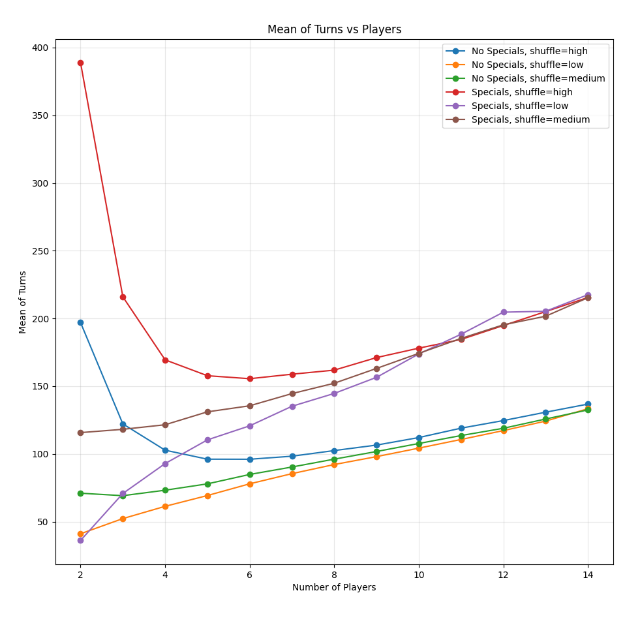
## Резултати





Според густините на распределбите, може горе доле да се донесат истите заклучоци како претходно и да се потврди хипотезата, а уште повеќе може да се констатира дека кај податоците со и без специјални карти, доколку има висок број на играчи, распределбите минимално се разликуваат, односно системот се доближува до некоја стабилна состојба.

### Математичко очекување и дисперзија



За математичкото очекување и дисперзијата, може да се донесат истите заклучоци како претходно, односно дека при мал број на играчи системот е нестабилен и во поголема мера подложен на дестабилизирачки фактори.

Како што расте бројот на играчи оваа сензитивност се намалува и системот се стабилизира. Кај математичкото очекување се забележува силна линеарна врска, а кај стандардната девијација и блага стагнација.

# Заклучок

Со разгледување на UNO како Марков процес и преку симулации со Монте Карло методи, се утврдува дека должината на една партија зависи од бројот на играчи, степенот на мешање на картите и присуството на специјални карти.

Главните заклучоци се:

* бројот на играчи има стабилизирачки ефект врз системот – со зголемување на бројот, разликите помеѓу различните нивоа на мешање постепено исчезнуваат;
* специјалните карти внесуваат дополнителен хаос, кој не се елиминира со зголемување на бројот на играчи, туку останува константен фактор на ентропија;
* системот без специјални карти е поедноставен, постабилен и попредвидлив во споредба со системот со специјални карти;
* распределбите на должината на партиите се доближуваат до нормална и можно е да се моделираат со гама распределба, иако параметрите не следат едноставна функција од бројот на играчи.

Со ова се потврдува дека играта UNO претставува интересен пример за примена на стохастички методи и може да се разгледува како динамичен систем кој ја комбинира случајноста од мешањето и стратегијата на играчите.